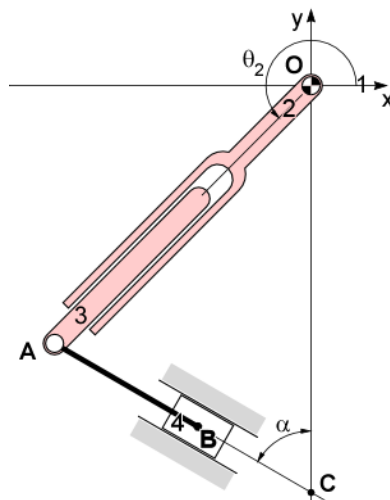


ESERCIZIO 4.1

Dato il seguente meccanismo, con dimensioni $l_{OC}=500\text{mm}$, $l_{AB}=100\text{mm}$, $\alpha=60^\circ$



- determinare il numero di gradi di libertà del meccanismo;
- scrivere le equazioni di chiusura, evidenziando costanti e variabili;
- nella posizione considerata ($\theta_2 = 225^\circ$), per valori unitari delle derivate prime e seconde di θ_2 , svolgere in modo grafico e analitico l'analisi di velocità e accelerazione, determinando la velocità e accelerazione del punto **B**.

Svolgimento

Prima domanda

Il meccanismo è composto da un telaio (1) e 3 corpi mobili (corpi 2 e 3, asta-pattino AB, 4), 3 coppie rotoidali e 1 prismatica, per cui la formula di mobilità fornisce:

$$n_{gl} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \quad (1)$$

Seconda domanda

MECCANISMO E ANALISI DI POSIZIONE

Il poligono dei vettori costruito in base all'effettiva geometria del meccanismo (Figura 1), è mostrato in Figura 2.

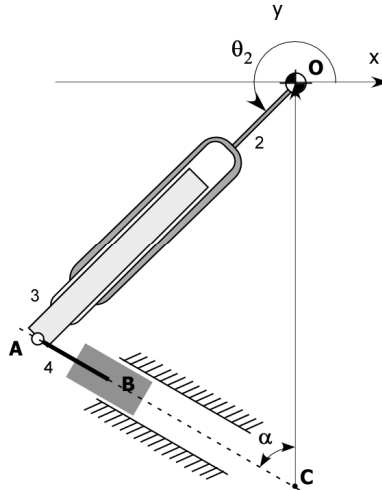


Figura 1: Effettiva geometria del meccanismo

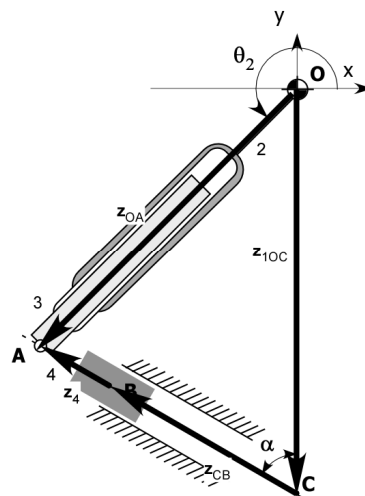


Figura 2: Poligono dei vettori del meccanismo

L'equazione di chiusura vettoriale assume, pertanto, la seguente forma:

$$\mathbf{z}_{1OC} + \mathbf{z}_{CB} + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_{OA} = 0 \quad (2)$$

Proiettandola sugli assi cartesiani del riferimento assoluto si ottiene

$$\begin{cases} 0 + d_{CB} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + l_4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - d_{OA} \cos(\theta_2) = 0 \\ -l_{OC} + d_{CB} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + l_4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - d_{OA} \sin(\theta_2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

nella quale sono state indicate con la lettera l le lunghezze costanti dipendenti dalla forma dei componenti del meccanismo e con d le distanze variabili dipendenti dalla posizione attuale del

meccanismo, e, pertanto, dal valore assunto dalla sua coordinata libera (come indicato al punto precedente, il meccanismo ha $n_{gl}=1$, per cui il suo movimento è comandato da una variabile). per quanto riguarda gli angoli, α è costante (definisce l'inclinazione della guida fissa a telaio), mentre θ_2 è variabile. Il sistema (3) è pertanto costituito da due equazioni in 3 variabili (d_{CB}, d_{OA} e θ_2); assumendo una di esse (θ_2) come coordinata libera, le altre due sono determinate in funzione di essa e delle dimensioni fisiche dei corpi del meccanismo, rappresentate delle variabili l_{OC}, l_4 e α .

La Figura 3 mostra la soluzione dell'analisi di posizione del meccanismo, ottenuta graficamente con uno sketcher parametrico. Le quote in rosso individuano le dimensioni dei corpi del meccanismo, mentre quelle in parentesi sono determinate dalle altre quote a dai vincoli sulla geometria. Ovviamente, un risultato simile si sarebbe potuto ottenere chiudendo a mano, con precisione, il poligono dei vettori su un foglio di carta.

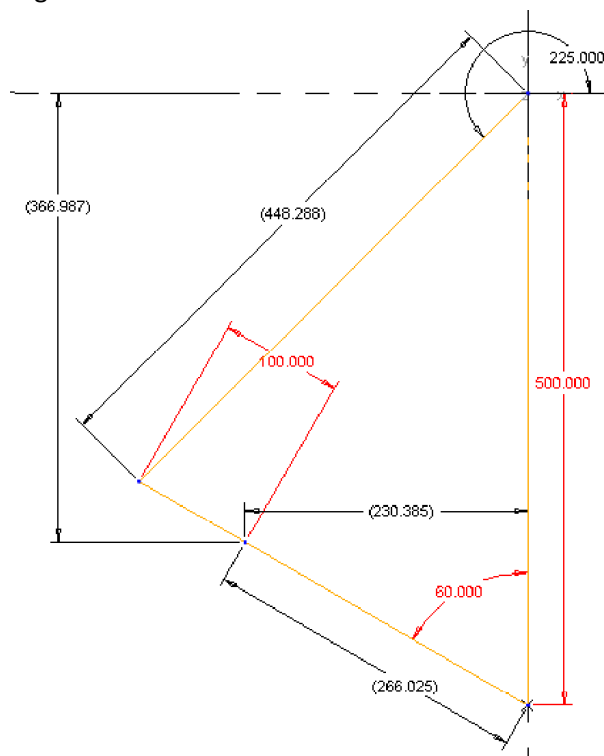


Figura 3: Analisi di posizione grafica del meccanismo

ANALISI DI VELOCITA'

L'analisi di velocità può essere svolta matematicamente derivando rispetto al tempo il sistema (3):

$$\begin{cases} \dot{d}_{CB} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{d}_{OA} \cos(\theta_2) + d_{OA} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 = 0 \\ \dot{d}_{CB} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{d}_{OA} \sin(\theta_2) - d_{OA} \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Anche in termini di velocità si tratta di un sistema di 2 equazioni in 3 variabili, $\dot{d}_{CB}, \dot{d}_{OA}$ e $\dot{\theta}_2$, assegnata

una delle quali ($\dot{\theta}_2$), le altre sono determinate. Si ricorda che, come discusso nel capitolo, le equazioni di velocità sono lineari nelle incognite; esso pertanto, può essere riscritto come segue:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & -\cos(\theta_2) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_{CB} \\ \dot{d}_{OA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{OA} \sin(\theta_2) \\ d_{OA} \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \quad (5)$$

e risolto con le usuali formule, ottenendo, dopo alcune semplificazioni:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{CB} &= \frac{d_{OA}}{\cos(\alpha - \theta_2)} \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_{OA} &= -\frac{d_{OA} \sin(\alpha - \theta_2)}{\cos(\alpha - \theta_2)} \dot{\theta}_2 = -d_{OA} \tan(\alpha - \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Sostituendo i valori numerici ($d_{OA} = 448,288 \text{ mm}$, $\alpha = 60^\circ = \pi/3$, $\theta_2 = 225^\circ = 5\pi/4$, $\dot{\theta}_2 = 1 \text{ rad/s}$)

(Figura 3), si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{CB} &= -464,104 \text{ mm/s} \\ \dot{d}_{OA} &= -120,119 \text{ mm/s} \end{aligned} \quad (7)$$

Le velocità sono numericamente negative, in quanto avendo imposto una velocità angolare positiva ($\dot{\theta}_2 = 1 \text{ rad/s}$) alle aste 2 e 3, il punto **A** si muove verso destra, e le distanze d_{OA} e d_{CB} tendono a ridursi. Poiché i punti **A** e **B** appartengono a uno stesso corpo (4) che ha un movimento di tipo traslatorio, essi avranno la stessa velocità assoluta:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \pi/2) \\ \sin(\alpha - \pi/2) \end{bmatrix} |\dot{d}_{CB}| = \begin{bmatrix} 401,92 \\ -232,05 \end{bmatrix} \text{ mm/s} \quad (8)$$

L'analisi di velocità può anche essere svolta graficamente sulla base del poligono delle velocità relative, che, per il meccanismo considerato, corrisponde alla seguente equazione vettoriale:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{r_{AO}} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \quad (9)$$

accoppiata al fatto che \mathbf{v}_A è diretta come $(\mathbf{A} - \mathbf{C})$. Nelle (9), il secondo addendo del secondo membro è noto (essendo $\omega_2 = \dot{\theta}_2 = 1 \text{ rad/s}$), il primo addendo è noto in direzione (// a $(\mathbf{O} - \mathbf{C})$). Graficamente, sempre tramite uno sketcher parametrico si ottiene il poligono in Figura 4, nel quale, anche se non indicati esplicitamente, sono stati inclusi i vincoli relativi alle direzioni dei vari vettori. Come si può osservare, i risultati (quote in parentesi) coincidono perfettamente con quelli ottenuti in via matematica.

Per quanto riguarda l'analisi di velocità, si ricorda che la velocità della coordinata libera, qui assunta unitaria non è altro che un "fattore di scala" per le altre velocità; in pratica, raddoppiando la prima, le seconde raddoppiano, mantenendo la geometria del problema inalterata. Essendo stati ottenuti per velocità unitaria, pertanto, le velocità calcolate non sono altro che i rapporti di velocità del meccanismo nella posizione considerata.

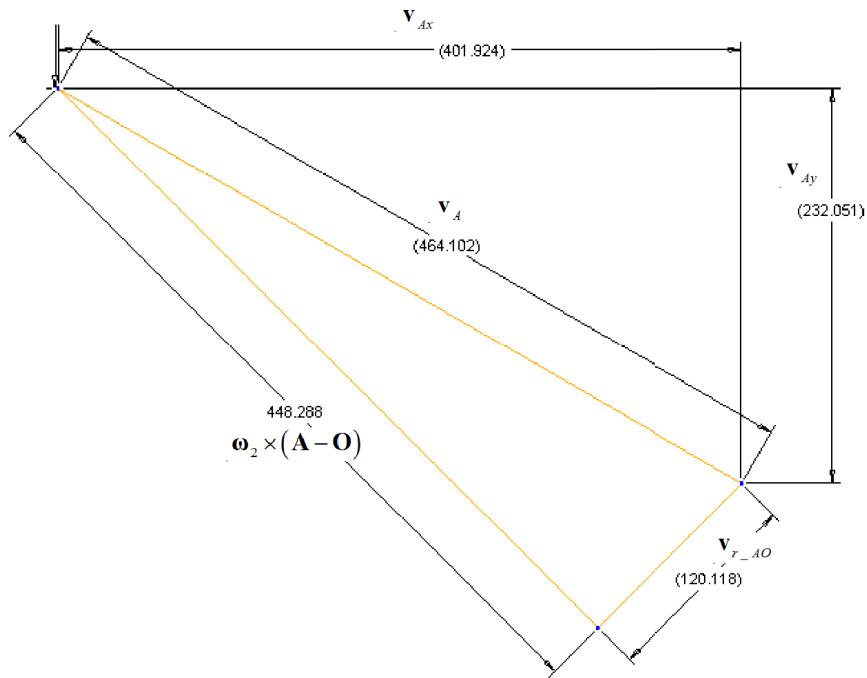


Figura 4: Analisi di velocità del meccanismo con metodo grafico

ANALISI DI ACCELERAZIONE

L'analisi di accelerazione può essere svolta matematicamente derivando rispetto al tempo il sistema (4), ottenendo le equazioni di accelerazione del meccanismo, che, come sempre, assumono una complessità maggiore, a causa dei termini quadratici nelle velocità:

$$\begin{cases} -\ddot{d}_{CB} \sin(\alpha) - \ddot{d}_{OA} \cos(\theta_2) + 2\dot{d}_{OA} \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + d_{OA} \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + d_{OA} \sin(\theta_2) \ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{d}_{CB} \cos(\alpha) - \ddot{d}_{OA} \sin(\theta_2) - 2\dot{d}_{OA} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + d_{OA} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - d_{OA} \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Nuovamente si tratta di un sistema di due equazioni lineari in 3 variabili, \ddot{d}_{CB} , \ddot{d}_{OA} e $\ddot{\theta}_2$, riscrivibile nella forma:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & -\cos(\theta_2) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_{CB} \\ \ddot{d}_{OA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{OA} \sin(\theta_2) \\ d_{OA} \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} -d_{OA} \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{d}_{OA} \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \\ -d_{OA} \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{d}_{OA} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

nella quale si evidenzia che, la dipendenza delle accelerazioni del meccanismo dalla derivata seconda della sua coordinata libera è identica alle dipendenze fra le velocità (v. eq. (5)); in aggiunta, le accelerazioni hanno termini noti dipendenti quadraticamente dalle velocità, che rappresentano le accelerazioni centripete e complementari (v. anche App. B).

Risolviendo e semplificando, con un po' di passaggi si ottiene:

$$\ddot{d}_{CB} = \frac{d_{OA}\ddot{\theta}_2 + 2\dot{d}_{OA}\dot{\theta}_2}{\cos(\alpha - \theta_2)}$$

$$\ddot{d}_{OA} = \frac{-d_{OA}\sin(\alpha - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - 2\dot{d}_{OA}\dot{\theta}_2\sin(\alpha - \theta_2) + d_{OA}\cos(\alpha - \theta_2)\dot{\theta}_2^2}{\cos(\alpha - \theta_2)} =$$

$$= -d_{OA}\tan(\alpha - \theta_2)\ddot{\theta}_2 - 2\dot{d}_{OA}\dot{\theta}_2\tan(\alpha - \theta_2) + d_{OA}\dot{\theta}_2^2$$
(12)

nelle quali sono appunto evidenti i 3 contributi di accelerazione dipendente da $\ddot{\theta}_2$, accelerazione centripeta e complementare. Sostituendo i valori numerici per le posizioni e le velocità precedentemente calcolate e $\dot{\omega}_2 = \ddot{\theta}_2 = 1 \text{ rad} / \text{s}^2$ si ottiene:

$$\ddot{d}_{CB} = -215,39 \text{ mm/s}^2$$

$$\ddot{d}_{OA} = 392,54 \text{ mm/s}^2$$
(13)

e per le accelerazioni dei punti **A** e **B**:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \pi/2) \\ \sin(\alpha - \pi/2) \end{bmatrix} |\ddot{d}_{CB}| = \begin{bmatrix} 186,53 \\ -107,70 \end{bmatrix} \text{ mm/s}^2$$
(14)

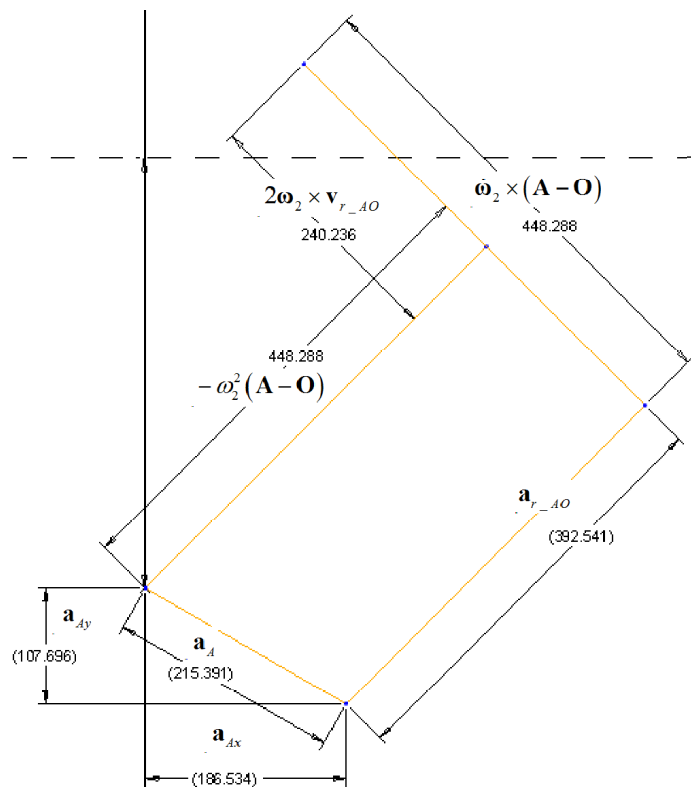


Figura 5: Analisi di accelerazione del meccanismo con metodo grafico

Lo stesso problema può essere impostato e risolto con un approccio grafico, basato su poligoni di accelerazioni relative. In particolare, l'accelerazione di **A** sarà ottenibile come:

$$\mathbf{a}_A = \omega_2 \times (\mathbf{A} - \mathbf{O}) - \omega_2^2 (\mathbf{A} - \mathbf{O}) + 2\omega_2 \times \mathbf{v}_{r_{AO}} + \mathbf{a}_{r_{AO}} \quad (15)$$

e, d'altra parte, sarà diretta come $(\mathbf{A} - \mathbf{C})$.

I primi 3 vettori del secondo membro della sono completamente noti, e possono essere disegnati, il quarto è noto in direzione $(\parallel(\mathbf{A} - \mathbf{O}))$, e infine la direzione nota di \mathbf{a}_A consente di chiudere il poligono, come indicato in Figura 5.

Le 3 costruzioni grafiche possono essere visualizzate insieme per una migliore comprensione del meccanismo (Figura 6). Ovviamente, cambiando il valore della coordinata libera o delle sue derivate, tali costruzioni "si deformano", potenzialmente in modo automatico se lo sketcher adottato supporta vincoli, parametri e relazioni fra di loro, e la costruzione grafica è stata effettuata correttamente.

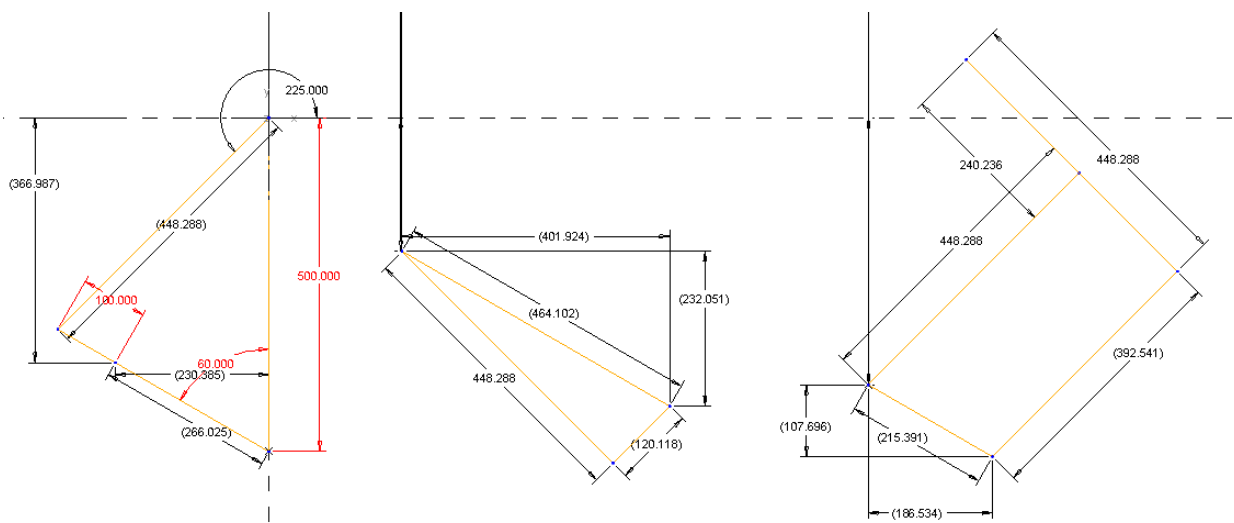
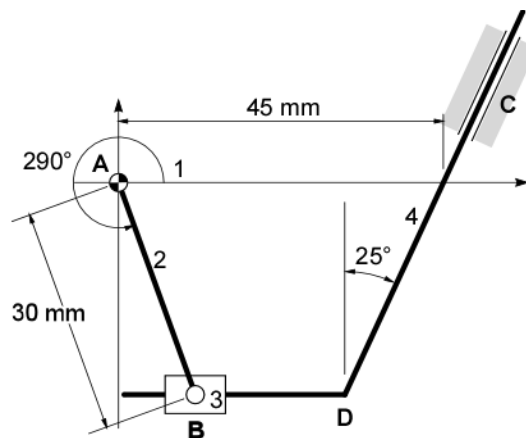


Figura 6: Visione sintetica della soluzione grafica

ESERCIZIO 4.2

Dato il seguente meccanismo a un grado di libertà, con le dimensioni e i dati di posizione indicati in figura



- scrivere le equazioni di posizione e risolverle, assumendo come coordinata libera l'angolo θ
- nella posizione indicata, calcolare le coordinate del punto D e verificare graficamente la correttezza dei risultati
- derivare le equazioni di posizione, ottenendo quelle di velocità; costruire la matrice jacobiana e cercare le eventuali posizioni singolari del cinematismo. Nella posizione indicata in figura, calcolare il rapporto di velocità $v_D / \dot{\theta}$; verificare il risultato con un'analisi cinematica effettuata graficamente
- derivare le equazioni di velocità, ottenendo quelle di accelerazione; mettere in evidenza i termini quadratici nelle velocità e discuterne il significato fisico
- nella posizione indicata, calcolare l'accelerazione di D, per $\dot{\theta} = 5 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\theta} = 2 \text{ rad/s}^2$; verificare il risultato con un'analisi cinematica effettuata graficamente.

Soluzioni commentate

1) Poligono di chiusura:

$$\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_{4BD} + \mathbf{z}_{4DC} - \mathbf{z}_1 = 0 \quad (1)$$

Poligono chiusura proiettato:

$$\begin{cases} l_2 \cos(\theta_2) + d_{4BD} + d_{4DC} \cos(\alpha_4) - l_1 = 0 \\ l_2 \sin(\theta_2) + d_{4DC} \sin(\alpha_4) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

con variabili θ_2 , d_{4BD} e d_{4DC}

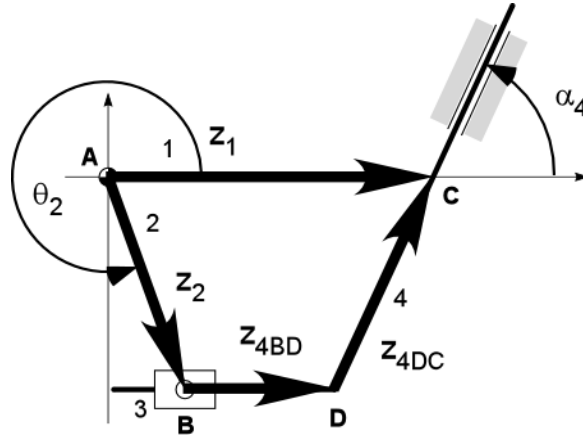


Figura 1: Poligono chiusura meccanismo

Soluzione equazioni di posizione:

$$d_{4DC} = -\frac{l_2 \sin(\theta_2)}{\sin(\alpha_4)} \quad (3)$$

$$d_{4BD} = l_1 - \frac{l_2 \sin(\alpha_4 - \theta_2)}{\sin(\alpha_4)}$$

2) Valori numerici per la posizione dell'esercizio

$$\begin{aligned} d_{4DC} &= 31,105 \text{ mm} \\ d_{4BD} &= 21,594 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4)$$

Verifica grafica (con sketcher)

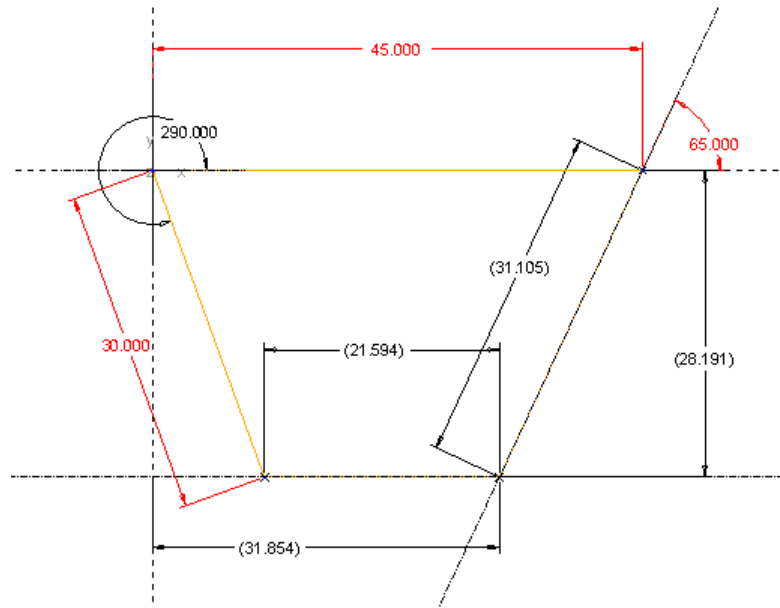


Figura 2: Verifica analisi di posizione

Le coordinate del punto **D** sono [31,85 ; -28,19].

3) Equazioni di velocità

$$\begin{cases} -l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 + \dot{d}_{4BD} + \dot{d}_{4DC} \cos(\alpha_4) = 0 \\ l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 + \dot{d}_{4DC} \sin(\alpha_4) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Forma normalizzata (con Jacobiano)

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha_4) \\ 0 & \sin(\alpha_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_{4BD} \\ \dot{d}_{4DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) \\ -\cos(\theta_2) \end{bmatrix} l_2 \dot{\theta}_2 \quad (6)$$

Il determinante della matrice Jacobiana è $\sin(\alpha_4)$ che non si annulla mai (per la geometria qui studiata), e pertanto, il meccanismo non ha posizioni singolari.

Valori numerici

$$\begin{aligned} \dot{d}_{4BD} &= -23,406 \text{ mm/s} \\ \dot{d}_{4DC} &= -11,321 \text{ mm/s} \end{aligned} \quad (7)$$

la cui verifica grafica è indicata in figura sottostante

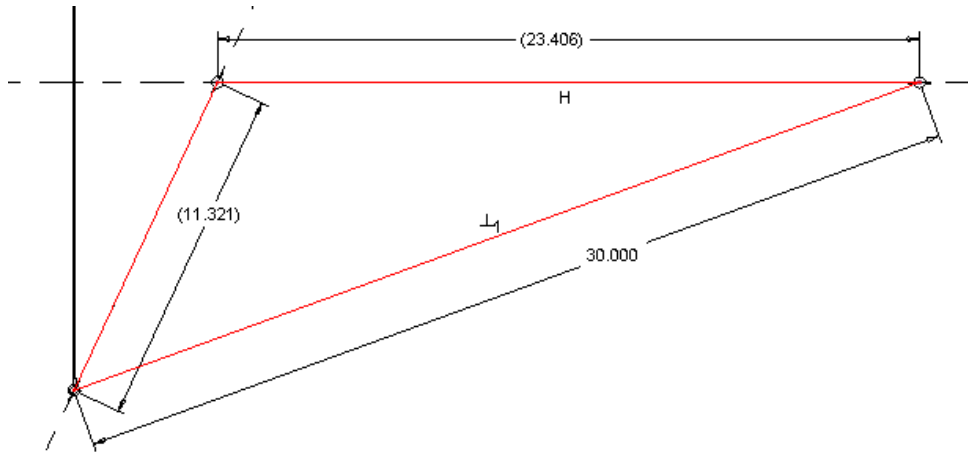


Figura 3: Verifica analisi di velocità

la cui equazione vettoriale è:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D_B} = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \mathbf{v}_{D_B} \quad (8)$$

Poiché l'analisi di velocità è stata svolta per valore unitario della velocità della coordinata libera, i risultati coincidono con i relativi rapporti di velocità, per cui

$$\frac{v_D}{\omega_2} = \dot{d}_{4DC} = -11,321 \text{ mm/rad} \quad (9)$$

4) Equazioni di accelerazione

$$\begin{cases} -l_2 \sin(\theta_2) \ddot{\theta}_2 + \ddot{d}_{4BD} + \ddot{d}_{4DC} \cos(\alpha_4) - l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 = 0 \\ l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 + \ddot{d}_{4DC} \sin(\alpha_4) - l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

che sono riscrivibili in forma normalizzata:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha_4) \\ 0 & \sin(\alpha_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_{4BD} \\ \ddot{d}_{4DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) \\ -\cos(\theta_2) \end{bmatrix} l_2 \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \quad (11)$$

I termini quadratici presenti nella (11) nascono dall'accelerazione centripeta del punto **B** che ruota attorno a **A**.

5) Analisi di accelerazione

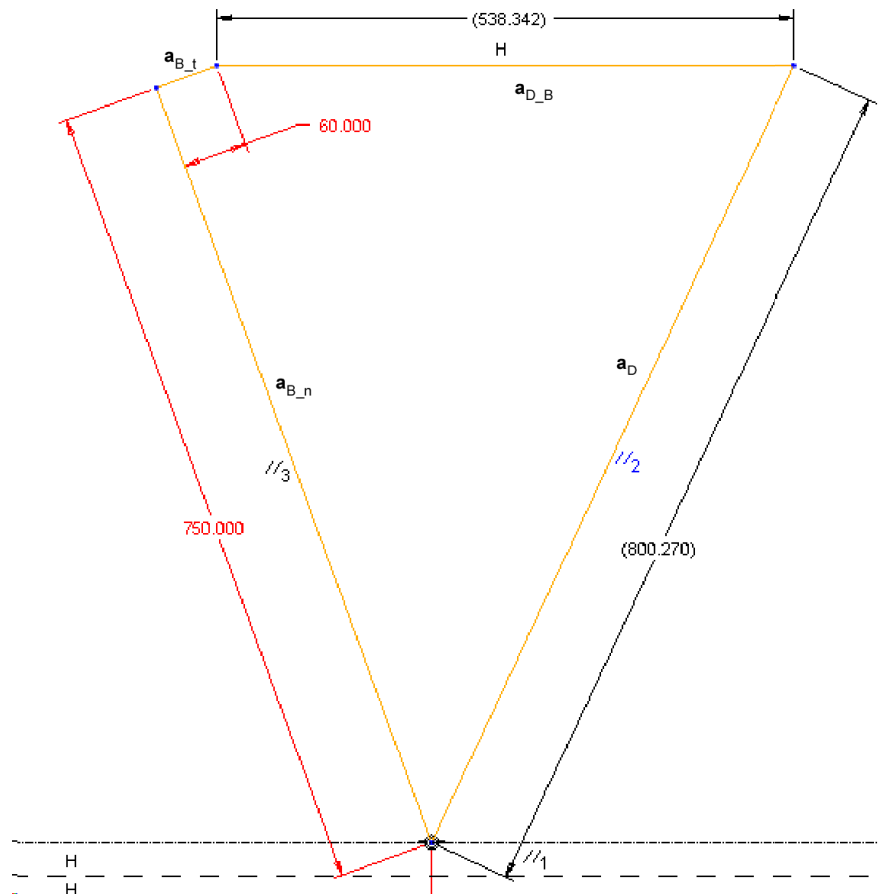


Figura 4: Verifica analisi di accelerazione

Sostituendo i valori richiesti ($\dot{\theta}_2 = 5 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\theta}_2 = 2 \text{ rad/s}^2$) nelle (11), si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_{4BD} &= 538,34 \text{ mm/s}^2 \\ \ddot{d}_{4DC} &= -800,27 \text{ mm/s}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

che è confermato graficamente dal poligono in Figura 4, corrispondente all'equazione vettoriale:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D_B} = \dot{\omega}_2 \times (\mathbf{B} - \mathbf{A}) - \omega^2 (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \mathbf{a}_{D_B} = \mathbf{a}_{B_t} + \mathbf{a}_{B_n} + \mathbf{a}_{D_B} \quad (13)$$

SOLUZIONI COMMENTATE ESERCIZIO 4.3

1) numero gradi di libertà

$$n_{gl} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 11 - 1 = 1 \quad (1)$$

(8 corpi mobili, 11 coppie rotoidali e prismatiche (NB.: la rotoidale in D va contata 2 volte, poichè su di essa insistono 3 corpi), 1 coppia a ingranaggio)

2) rapporto fra velocità in uscita e velocità in ingresso

Effettuando l'analisi di velocità, nella posizione in figura, per v_{IN} unitaria, si ottiene

$$\omega_{OUT} = -\frac{2}{9l} v_{IN} = -\frac{1}{0,045} v_{IN} \quad (2)$$

nella quale l è la lunghezza di un quadretto in figura (numericamente $l = 10 \text{ mm} = 0.01 \text{ m}$)

Nella (2), v_{IN} è espressa in m/s.

3) analisi di accelerazione

L'analisi di accelerazione, condotta graficamente, analiticamente o tramite un codice di simulazione dei meccanismi, per $v_{IN} = \text{cost.} = 0.2 \text{ m/s}$ fornisce:

$$\dot{\omega}_{OUT} = \dot{\omega}_9 = 37,03 \text{ rad} / \text{s}^2 \quad (3)$$

Per comodità dello studente, vengono fornite anche le accelerazioni angolari degli altri corpi:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_4 &= 7,11 \text{ rad} / \text{s}^2 \\ \dot{\omega}_5 &= -5,11 \text{ rad} / \text{s}^2 \\ \dot{\omega}_7 &= -11,11 \text{ rad} / \text{s}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

SOLUZIONI COMMENTATE ESERCIZIO 4.4

- **prima domanda**

Il meccanismo è composto da un telaio (1) e 5 corpi mobili, 4 coppie rotoidali e 3 prismatiche, per cui la formula di mobilità fornisce:

$$n_{gl} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \quad (1)$$

- **seconda domanda**

VALORE DELLE COSTANTI GEOMETRICHE

- lunghezza della manovella 2 **AB**, $l_2 = l_{AB} = 60$ mm
- posizione della coppia prismatiche fra glifo 3 (corpo con la prismatiche a asse orizzontale e la rotoidale nel punto **C**) e telaio, coincidente con asse y riferimento assoluto
- distanza fra la retta della prismatiche in **B** e il punto **C** (lunghezza del glifo 3) $l_3 = 100$ mm
- lunghezza della biella 4 **CD**, $l_{CD} = l_4 = 100$ mm
- la posizione della coppia prismatiche fra il pattino in D e il telaio: retta orizzontale distanza pari a $l_{ADy} = 100$ mm dall'asse x assoluto

- **terza domanda**

EQUAZIONI DI POSIZIONE

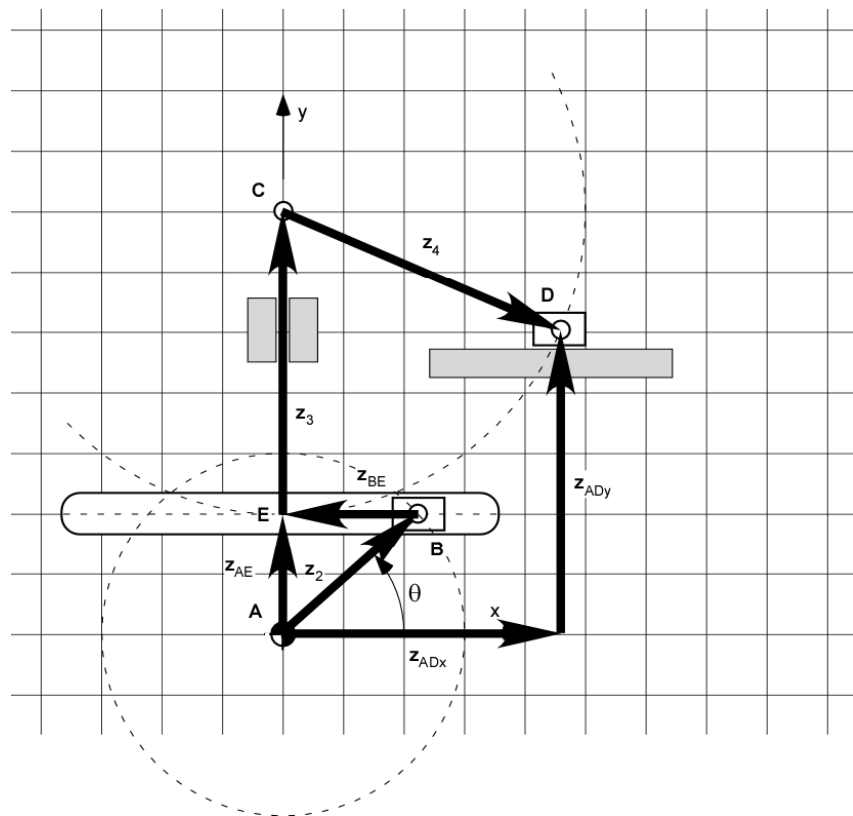


Figura 1: Poligono di chiusura del meccanismo

I poligoni di chiusura del meccanismo possono essere scritti nel seguente modo (Figura 1):

$$\begin{cases} \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_{BE} - \mathbf{z}_{AE} = 0 \\ \mathbf{z}_{AE} + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_{ADy} - \mathbf{z}_{ADx} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Queste equazioni proiettate sugli assi, diventano ($\theta = \vartheta_2$):

$$\begin{cases} l_2 \cos(\vartheta_2) + d_{BE} = 0 \\ l_2 \sin(\vartheta_2) - d_{AE} = 0 \\ l_4 \cos(\vartheta_4) - d_{ADx} = 0 \\ d_{AE} + l_3 + l_4 \sin(\vartheta_4) - l_{ADy} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

in cui l_2, l_3, l_4, l_{ADy} sono costanti note (v. prima), mentre $\vartheta_2, d_{BE}, d_{AE}, d_{ADx}, \vartheta_4$ sono variabili. Scelta una variabile come coordinata libera ($\theta = \vartheta_2$), è possibile ricavare l'andamento delle altre 4 in funzione di essa risolvendo le (3).

- **quarta domanda**

SOLUZIONE EQUAZIONI DI POSIZIONE

Le prime due equazioni in (3) sono immediatamente risolubili:

$$\begin{aligned}d_{BE} &= -l_2 \cos(\vartheta_2) \\d_{AE} &= l_2 \sin(\vartheta_2)\end{aligned}\tag{4}$$

e ammettono una sola soluzione, per cui la parte di meccanismo costituita dai corpi 2 e 3 ammette una sola configurazione geometrica (quella in figura). La posizione del punto **C** è, pertanto, anch'essa univocamente determinata, essendo

$$\begin{aligned}x_C &= 0 \\y_C &= d_{AE} + l_3\end{aligned}\tag{5}$$

Risolte le prime due, le seconde due equazioni in (3) sono immediatamente risolubili, in sequenza. Di esse, la seconda fornisce direttamente due valori per ϑ_4 :

$$\vartheta_4' = \arcsen\left(\frac{(l_{ADy} - d_{AE} - l_3)}{l_4}\right) \text{ e } \vartheta_4'' = \pi - \vartheta_4'\tag{6}$$

mentre la prima fornisce i due corrispondenti valori per d_{ADx} :

$$d_{ADx} = l_4 \cos(\vartheta_4)\tag{7}$$

I risultati consentono di dedurre che, dato il punto **C**, la seconda parte del meccanismo (asta 4 e pattino in **D**) ammette due configurazioni geometriche. esse sono facilmente interpretabili, osservando che la retta orizzontale passante per **D**, interseca in due punti la circonferenza di centro **C** e raggio l_4 . la seconda configurazione non è mostrata in Figura.

- **quinta domanda**

GRAFICI DI $x_C(\theta)$ e $y_C(\theta)$

I grafici richiesti sono immediatamente ottenibili dalle (4) e (5). Il grafico di $y_C(\theta)$ è mostrato in figura, mentre quello di $x_C(\theta)$ è omissso, essendo $x_C(\theta) = \text{cost.} = 0$.

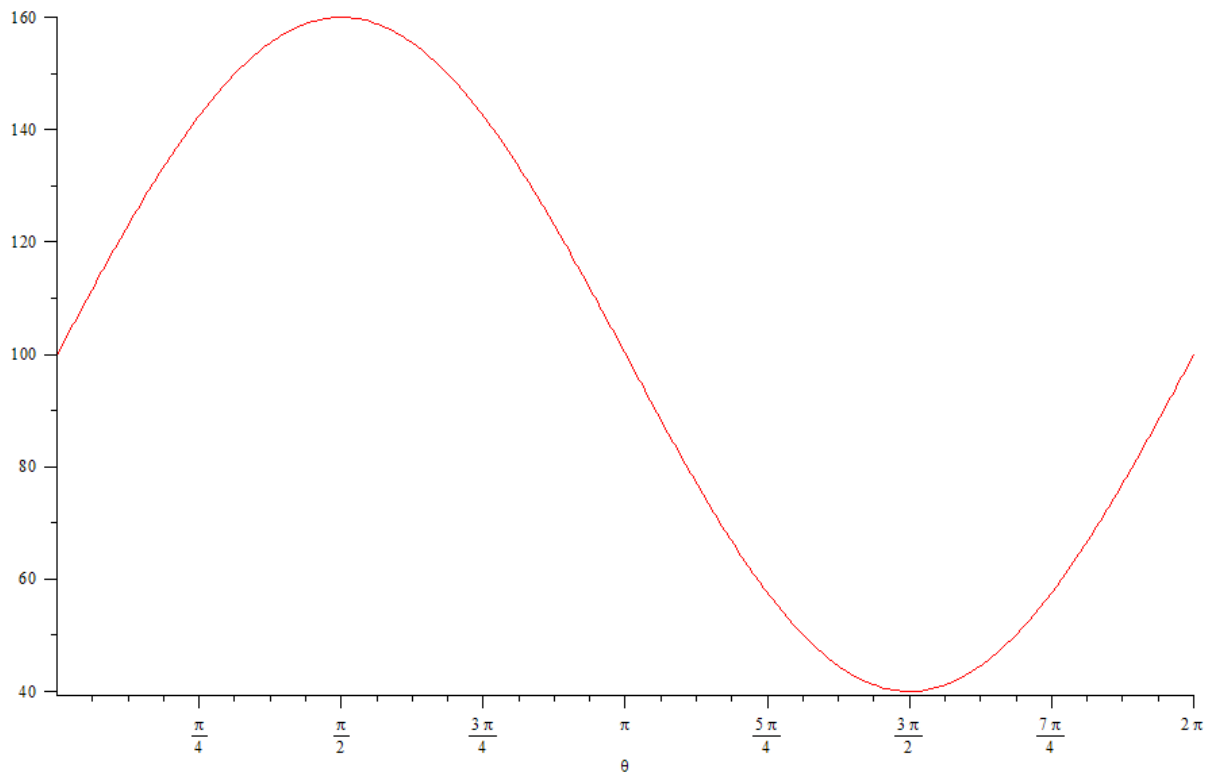


Figura 2: Grafico di $y_c(\theta)$

• **sesta domanda**

EQUAZIONI DI VELOCITA'

Derivando rispetto al tempo le (3), si ottiene:

$$\begin{cases} -l_2 \sin(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 + \dot{d}_{BE} = 0 \\ l_2 \cos(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 - \dot{d}_{AE} = 0 \\ -l_4 \sin(\vartheta_4) \dot{\vartheta}_4 - \dot{d}_{ADx} = 0 \\ \dot{d}_{AE} + l_4 \cos(\vartheta_4) \dot{\vartheta}_4 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

che può essere riscritto in forma di sistema di equazioni lineari, nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_4 \sin(\vartheta_4) & 1 \\ 0 & 1 & l_4 \cos(\vartheta_4) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_{BE} \\ \dot{d}_{AE} \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{d}_{ADx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \sin(\vartheta_2) \\ l_2 \cos(\vartheta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \quad (9)$$

• **settima e ottava domanda**

ANALISI DI VELOCITA'

L'analisi di velocità viene svolta graficamente, nella posizione prescelta, mostrata nel dettaglio in Figura 3.

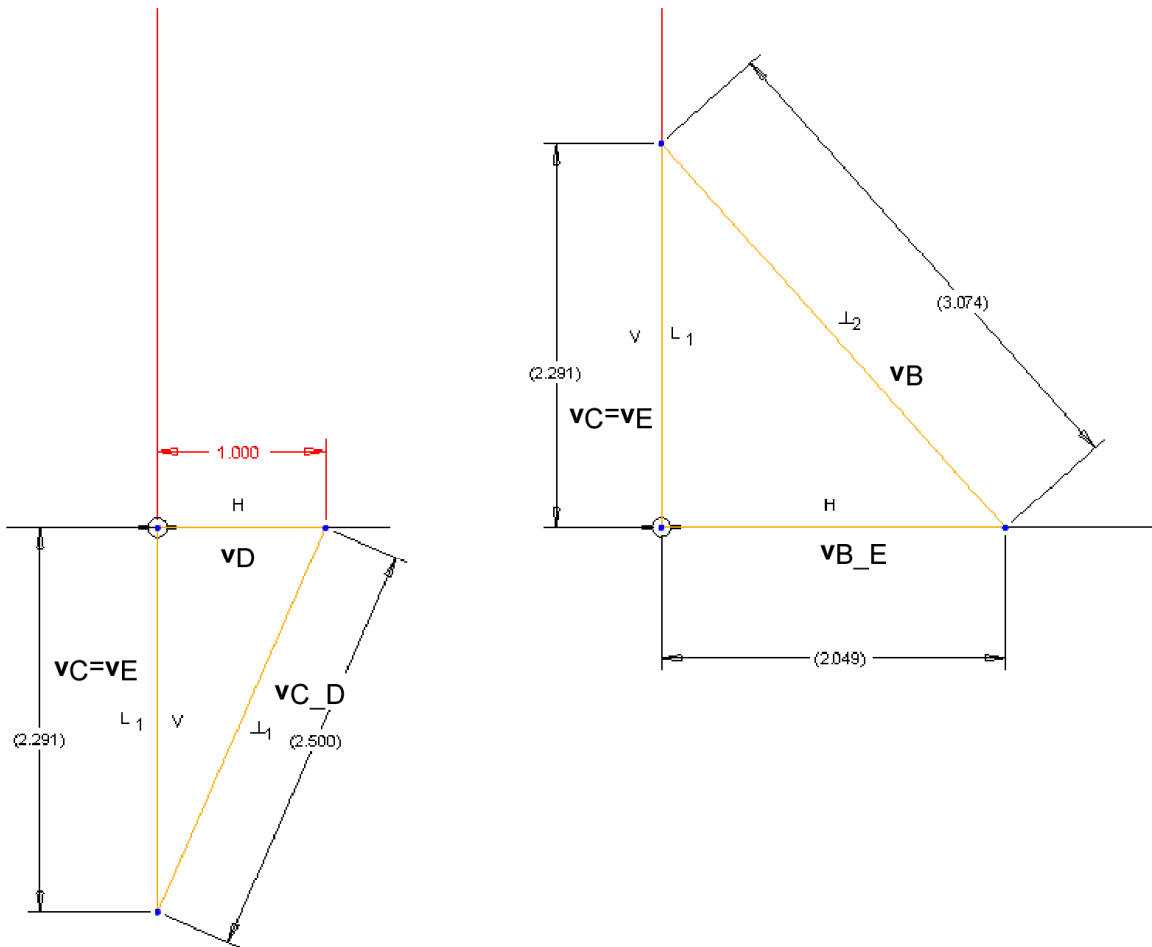


Figura 4: Analisi grafica di velocità (per $y_E=40\text{mm}$ e $\dot{x}_D = 1\text{m/s}$, v. testo dell'esercizio)

Dall'analisi (Figura 4) risulta, $v_B = 3,074\text{m/s}$, diretto verso basso-destra, per cui

$$\dot{\vartheta}_2 = \omega_2 = v_B / l_2 = 3,074 / 0,06 = 51,23\text{rad/s} \quad (10)$$

in senso orario (negativa).

• **nona domanda**

ANALISI DI ACCELERAZIONE

Effettuando l'analisi di accelerazione con i seguenti dati

$$\dot{x}_D = 1\text{m/s} = 1000\text{mm/s} \quad (11)$$

$$\ddot{x}_D = -0,5\text{m/s}^2 = -500\text{mm/s}^2$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\omega_4 &= 25 \text{rad} / \text{s} \\ \omega_2 &= -51,24 \text{rad} / \text{s} \\ v_3 &= -2,292 \text{m} / \text{s}\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_4 &= 1421 \text{rad} / \text{s}^2 \\ \dot{\omega}_2 &= -1123,3 \text{rad} / \text{s}^2 \\ a_3 &= -155,24 \text{m} / \text{s}^2\end{aligned}$$

SOLUZIONI COMMENTATE ESERCIZIO 4.5

• **prima domanda**

Il disegno nel testo del meccanismo non chiarisce del tutto gli accoppiamenti fra i corpi 2, 3 e il “dischetto” che li accoppia, con centro **P**. Qualora si trascuri il movimento di rotazione del dischetto attorno al suo centro (che, in effetti, non è cinematicamente significativo), un più chiaro modo di capire la cinematica del meccanismo è indicato in Figura 2, nella quale il dischetto è stato sostituito da due corpi (pattini 4 e 5), accoppiati con coppie prismatiche rispetto alle aste 2 e 3, e con una coppia rotoidale (centrata, appunto in **P**) fra di loro. A questo punto la formula di mobilità fornisce:

$$n_{gl} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2 \quad (1)$$

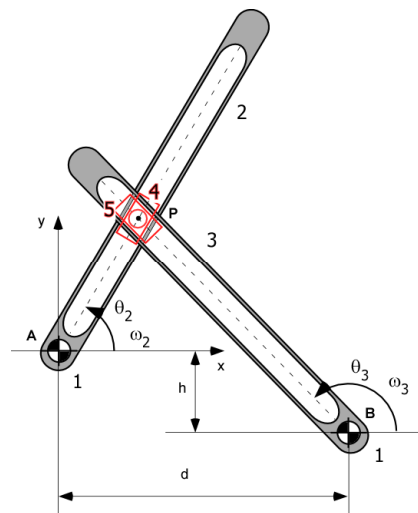


Figura 1: Schema cinematico del meccanismo

• **seconda domanda**

EQUAZIONI DI POSIZIONE E LORO SOLUZIONE

Il poligono di chiusura del meccanismo può essere scritto nel seguente modo (Figura 2):

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2 = 0 \quad (2)$$

Queste equazioni proiettate sugli assi, diventano:

$$\begin{cases} d + l_3 \cos(\vartheta_3) - l_2 \cos(\vartheta_2) = 0 \\ -h + l_3 \sin(\vartheta_3) - l_2 \sin(\vartheta_2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

nelle quali con l_2 e l_3 si sono indicate le distanze (variabili) fra **A**, **B** e il punto **P**.

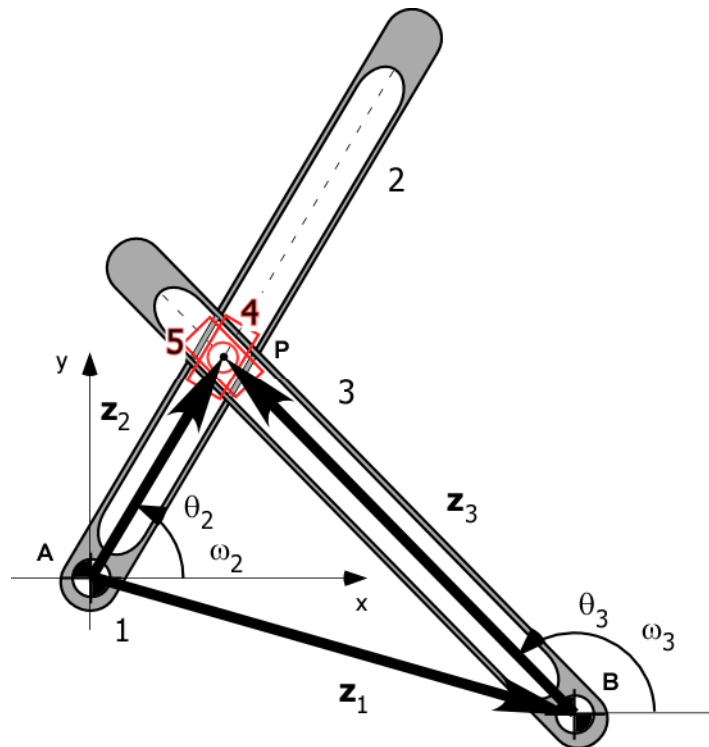


Figura 2: Poligono di chiusura del meccanismo

Scelte due variabili come coordinate libere fra le 4 disponibili ($\vartheta_2, \vartheta_3, l_2, l_3$), è possibile ricavare l'andamento delle altre 2 in funzione di esse risolvendo le (3).

- Soluzione rispetto a ϑ_2, ϑ_3 (assunti noti l_2, l_3)

Portando a secondo membro i termini in ϑ_2 , elevando al quadrato le due equazioni, sommando e semplificando si ottiene la seguente equazione

$$(2dl_3)\cos(\vartheta_3) + (-2hl_3)\sin(\vartheta_3) + (d^2 + h^2 + l_3^2 - l_2^2) = 0 \quad (4)$$

nella sola variabile ϑ_3 , che ha la struttura discussa in App. A:

$$A\cos(\vartheta_3) + B\sin(\vartheta_3) + C = 0 \quad (5)$$

e che può essere risolta con la formula A.23. Pertanto, l'equazione (4) fornisce due soluzioni.

Per ciascuno dei due valori di ϑ_3 è possibile ricavare univocamente il valore di ϑ_2 risolvendo le (3) rispetto a tale angolo:

$$\vartheta_2 = \arctan 2\left(\left(-h + l_3 \sin(\vartheta_3)\right), \left(d + l_3 \cos(\vartheta_3)\right)\right) \quad (6)$$

Pertanto, il meccanismo, assunto l_2, l_3 come coordinate libere, ammette due configurazioni, che, geometricamente, collocano il punto **P** nelle due intersezioni delle circonferenze centrate in **A** e **B**, di raggi l_2 e l_3 .

- Soluzione rispetto a l_2, l_3 (assunti noti ϑ_2, ϑ_3)

Le (3) sono lineari in l_2, l_3 e pertanto non ci sono difficoltà a ricavare da esse tali variabili, ottenendo:

$$l_2 = -\frac{h \cos(\vartheta_3) + d \sin(\vartheta_3)}{\cos(\vartheta_3) \sin(\vartheta_2) - \cos(\vartheta_2) \sin(\vartheta_3)} = -\frac{h \cos(\vartheta_3) + d \sin(\vartheta_3)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \quad (7)$$

$$l_3 = -\frac{h \cos(\vartheta_2) + d \sin(\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_3) \sin(\vartheta_2) - \cos(\vartheta_2) \sin(\vartheta_3)} = -\frac{h \cos(\vartheta_2) + d \sin(\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)}$$

Poiché le relazioni sono lineari, a meno di casi particolari, esse ammettono una sola soluzione rispetto alle variabili considerate; pertanto, il meccanismo, assunto ϑ_2, ϑ_3 come coordinate libere, ammette una sola configurazione.

Si noti che, quando $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) = 0$, cioè quando le due aste sono allineate, il meccanismo è in configurazione singolare e la posizione di **P** è indefinita.

- **terza domanda**

EQUAZIONI DI VELOCITA'

Derivando le equazioni di posizione si ottiene

$$\begin{cases} \dot{l}_3 \cos(\vartheta_3) - \dot{l}_2 \cos(\vartheta_2) - l_3 \sin(\vartheta_3) \dot{\vartheta}_3 + l_2 \sin(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 = 0 \\ \dot{l}_3 \sin(\vartheta_3) - \dot{l}_2 \sin(\vartheta_2) + l_3 \cos(\vartheta_3) \dot{\vartheta}_3 - l_2 \cos(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

che, scelte ϑ_2, ϑ_3 come coordinate libere, possono essere riscritte nella consueta forma

$$\begin{bmatrix} -\cos(\vartheta_2) & \cos(\vartheta_3) \\ -\sin(\vartheta_2) & \sin(\vartheta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\vartheta_2) \\ l_2 \cos(\vartheta_2) \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_2 + \begin{bmatrix} l_3 \sin(\vartheta_3) \\ -l_3 \cos(\vartheta_3) \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_3 \quad (9)$$

Il determinante della matrice Jacobiana diventa:

$$\sin(\vartheta_2) \cos(\vartheta_3) - \cos(\vartheta_2) \sin(\vartheta_3) = \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \quad (10)$$

e mostra che, come già discusso al punto precedente, con questa scelta delle coordinate libere, il meccanismo va in configurazione singolare quando le due aste 2 e 3 sono allineate.

- **quarta domanda**

GRAFICI x_p, y_p

Sono ottenuti dalle relazioni sottostanti (11), tenendo conto che l_2 dipende da ambedue ϑ_2, ϑ_3 (v. (7)), imponendo i valori imposti a h e d , e gli andamenti indicati nel testo dell'esercizio alle variabili ϑ_2, ϑ_3

Si noti che, viste le funzioni assegnate $\vartheta_2(t), \vartheta_3(t)$, tutti i movimenti e i relativi i grafici sono funzioni periodiche, con periodo pari a 1s.

Tutte le lunghezze (e le relative derivate) sono espresse in mm (mm/s, mm/s²).

$$\begin{cases} x_p = l_2 \cos(\vartheta_2) \\ y_p = l_2 \sin(\vartheta_2) \end{cases} \quad (11)$$

Assumono l'andamento mostrato nelle figure sottostanti.

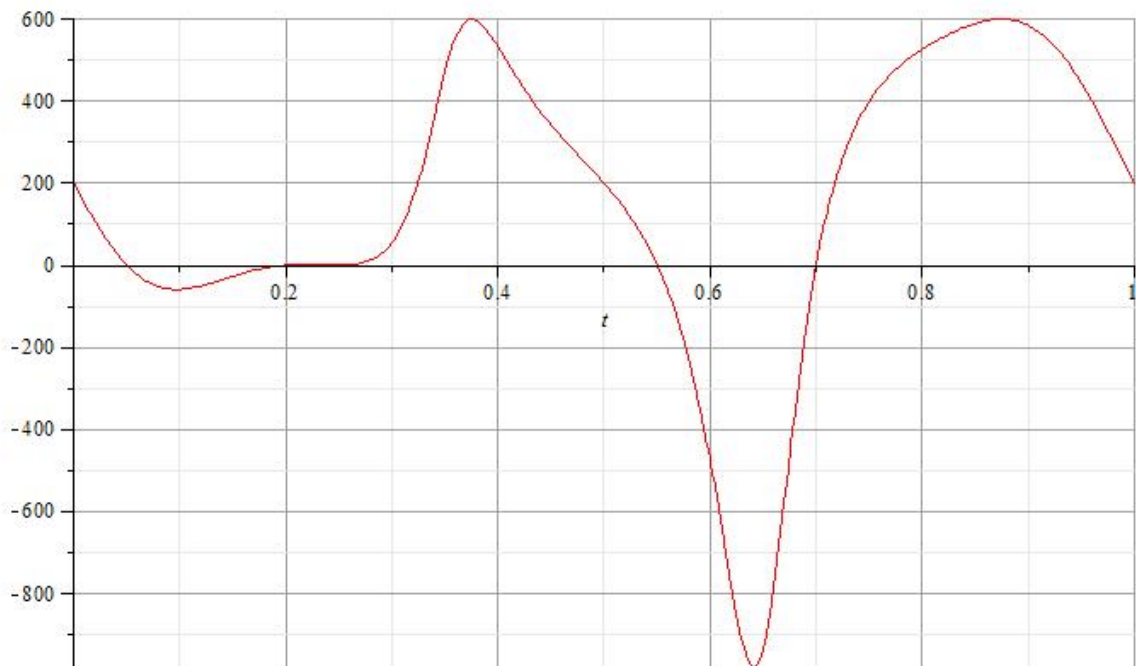


Figura 3: grafico di $x_p(t)$

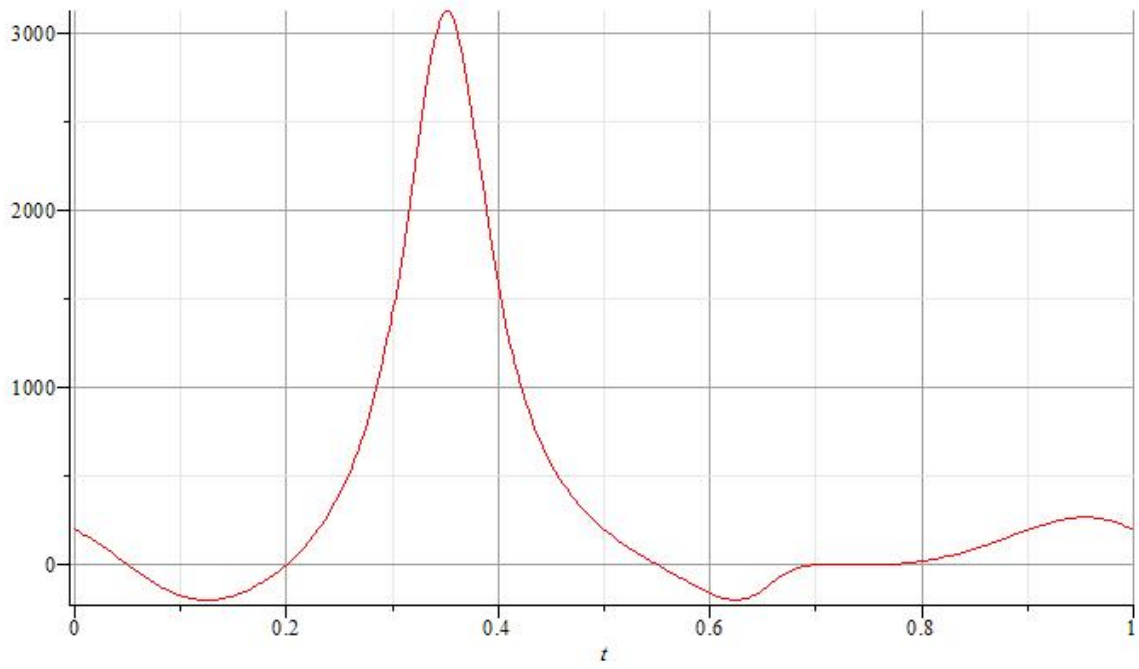


Figura 4: grafico di $y_p(t)$

Per comodità dello studente, vengono dati anche i grafici di l_2, l_3

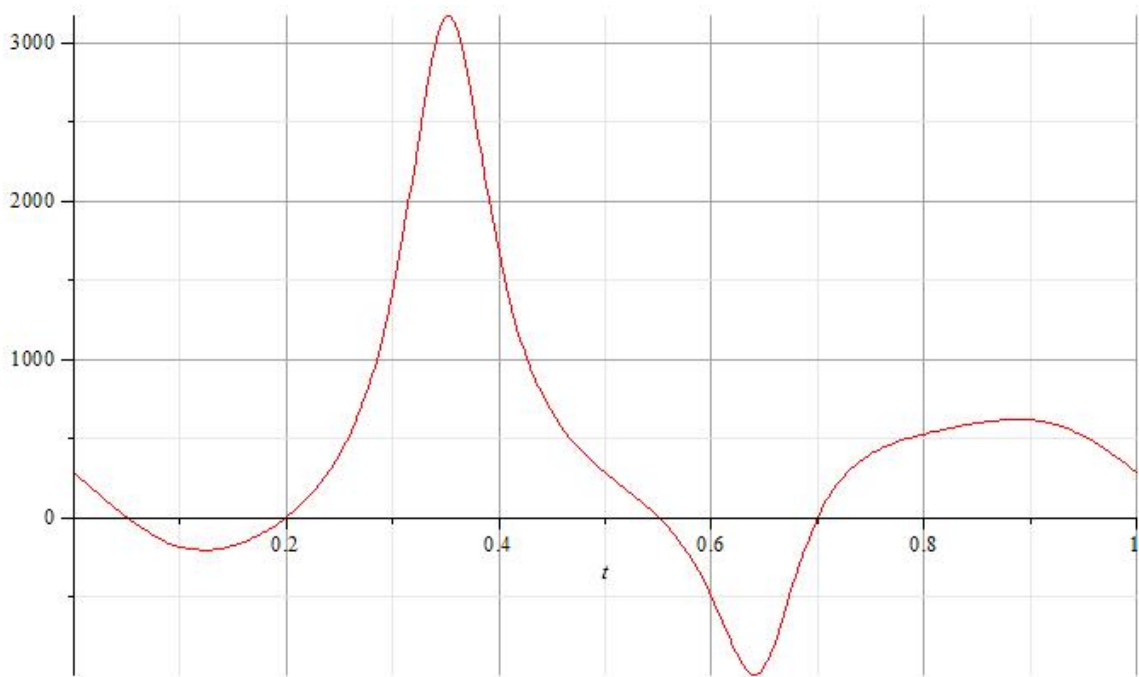


Figura 5: grafico di $l_2(t)$

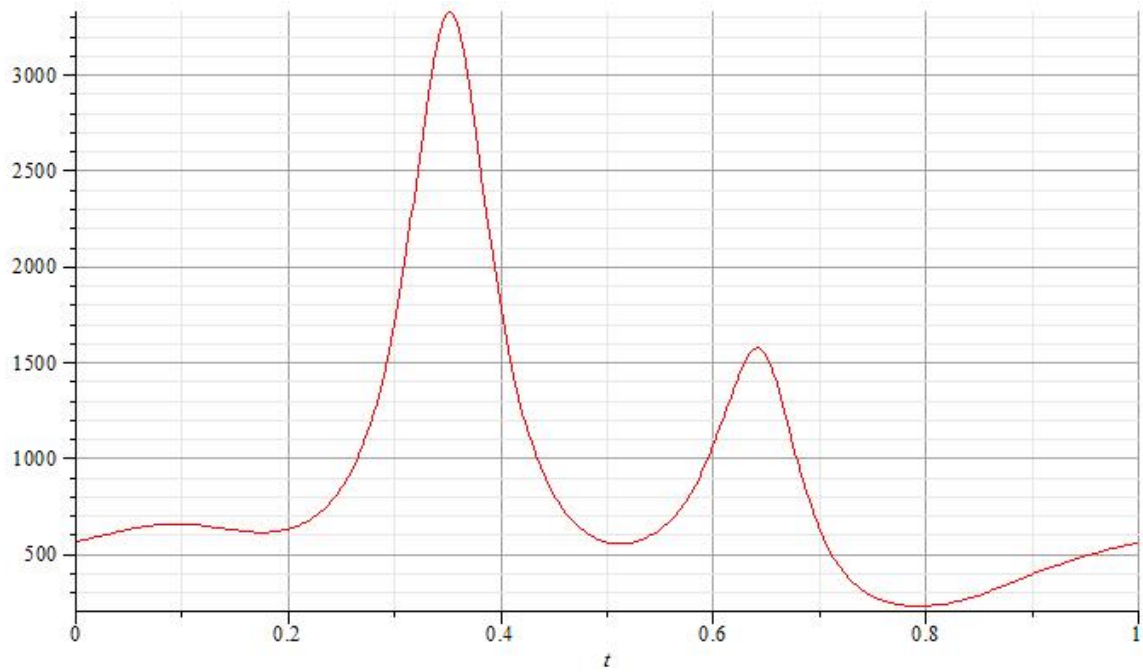


Figura 6: grafico di $l_3(t)$

- **quinta domanda**

GRAFICI DI VELOCITA' (\dot{x}_p, \dot{y}_p)

Derivando quanto necessario rispetto al tempo, si ottengono i seguenti andamenti, che rappresentano, ovviamente, le derivate rispetto al tempo delle funzioni i cui grafici sono dati nelle Figura 3 e Figura 4.

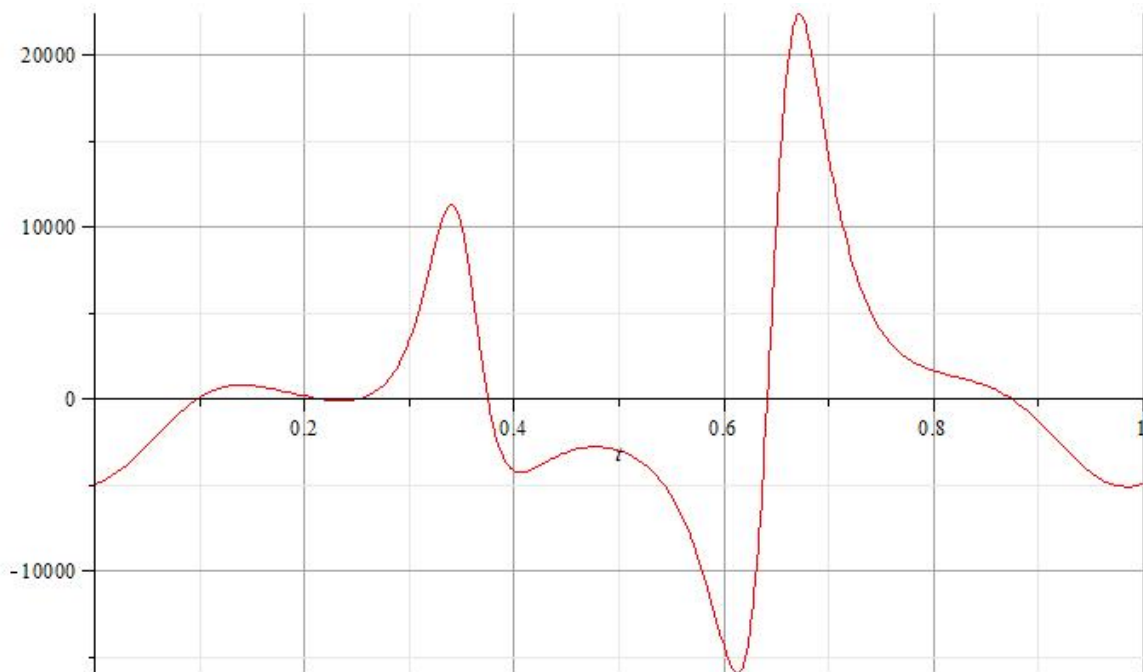


Figura 7: grafico di $\dot{x}_p(t)$

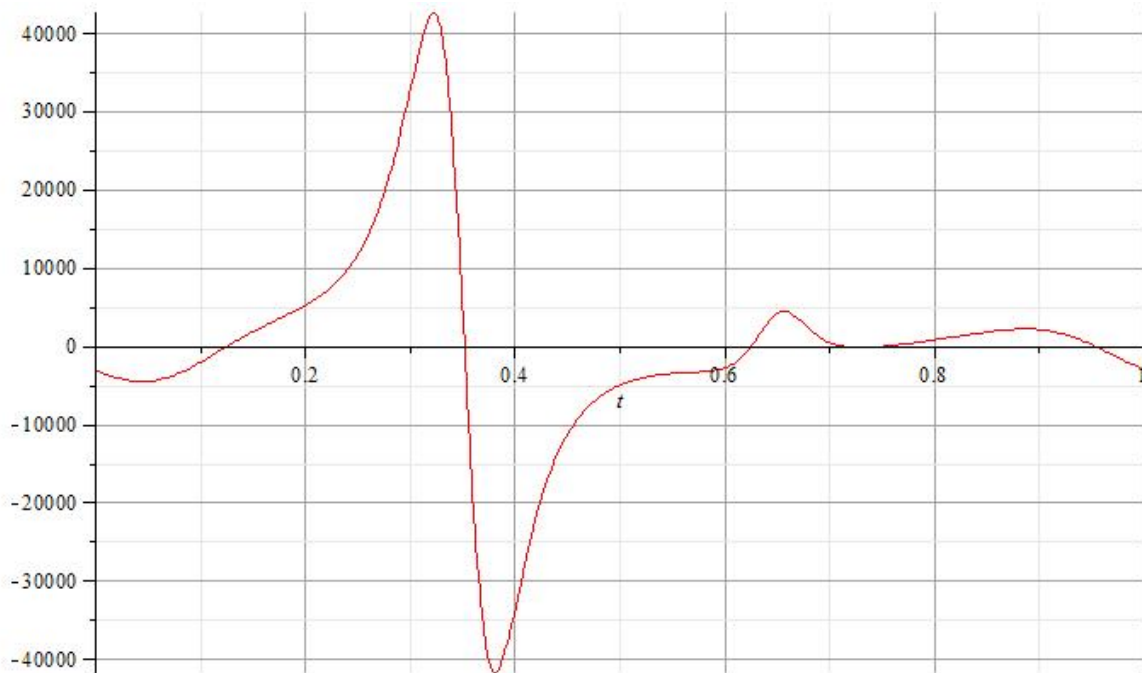


Figura 8: grafico di $\dot{y}_p(t)$

I valori numerici per $t=0$ sono:

$$\begin{cases} v_{Px}(0) = \dot{x}_p(0) = -4934,80 \text{ mm/s} \\ v_{Py}(0) = \dot{y}_p(0) = -2960,88 \text{ mm/s} \end{cases} \quad (12)$$

Come richiesto, essi sono verificati graficamente nelle figure sottostanti, la prima che rappresenta la posizione del meccanismo per $t=0$, la seconda il relativo poligono di velocità, associato alla seguente equazione:

$$\mathbf{v}_P = \omega_2 \times (\mathbf{P} - \mathbf{A}) + \mathbf{v}_{P_A} = \omega_3 \times (\mathbf{P} - \mathbf{B}) + \mathbf{v}_{P_B} \quad (13)$$

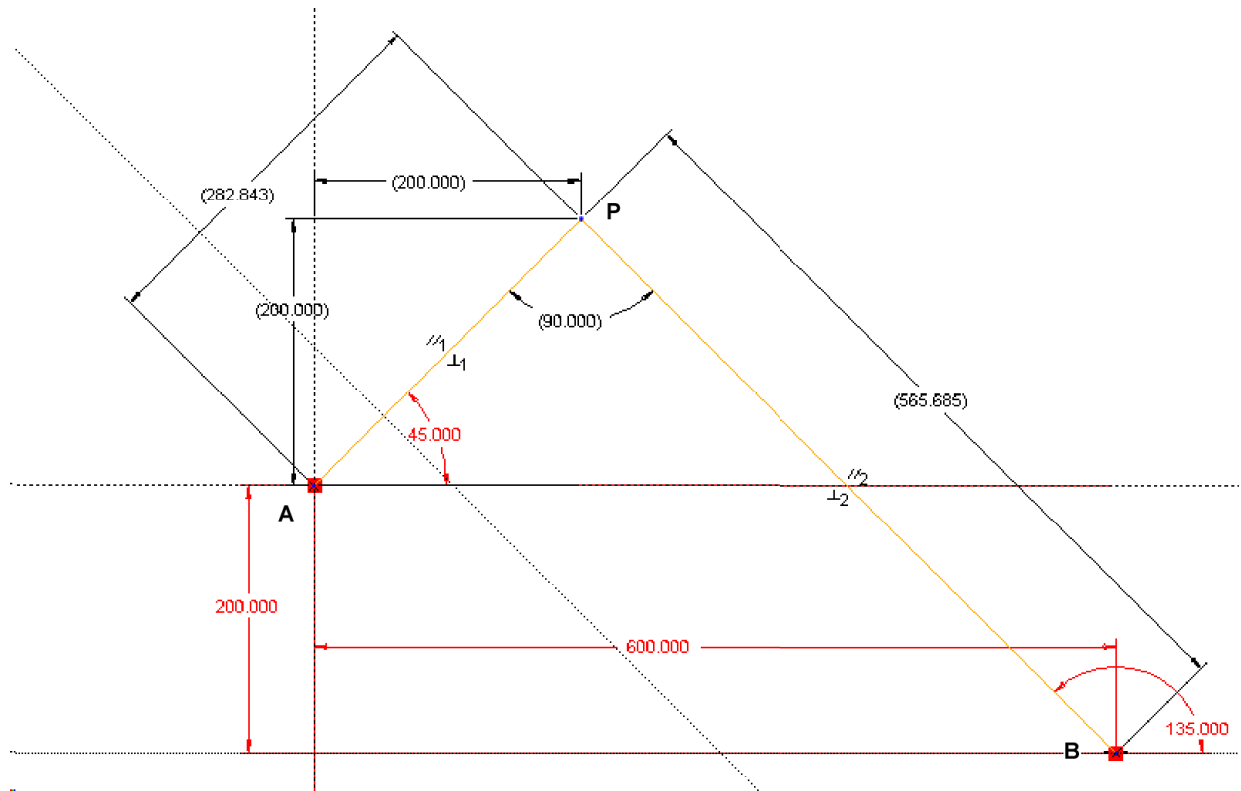


Figura 9: Posizione del meccanismo per $t=0$ (si noti che nella posizione considerata, le aste 2 e 3 sono ortogonali)

La soluzione grafica conferma i valori ottenuti analiticamente.

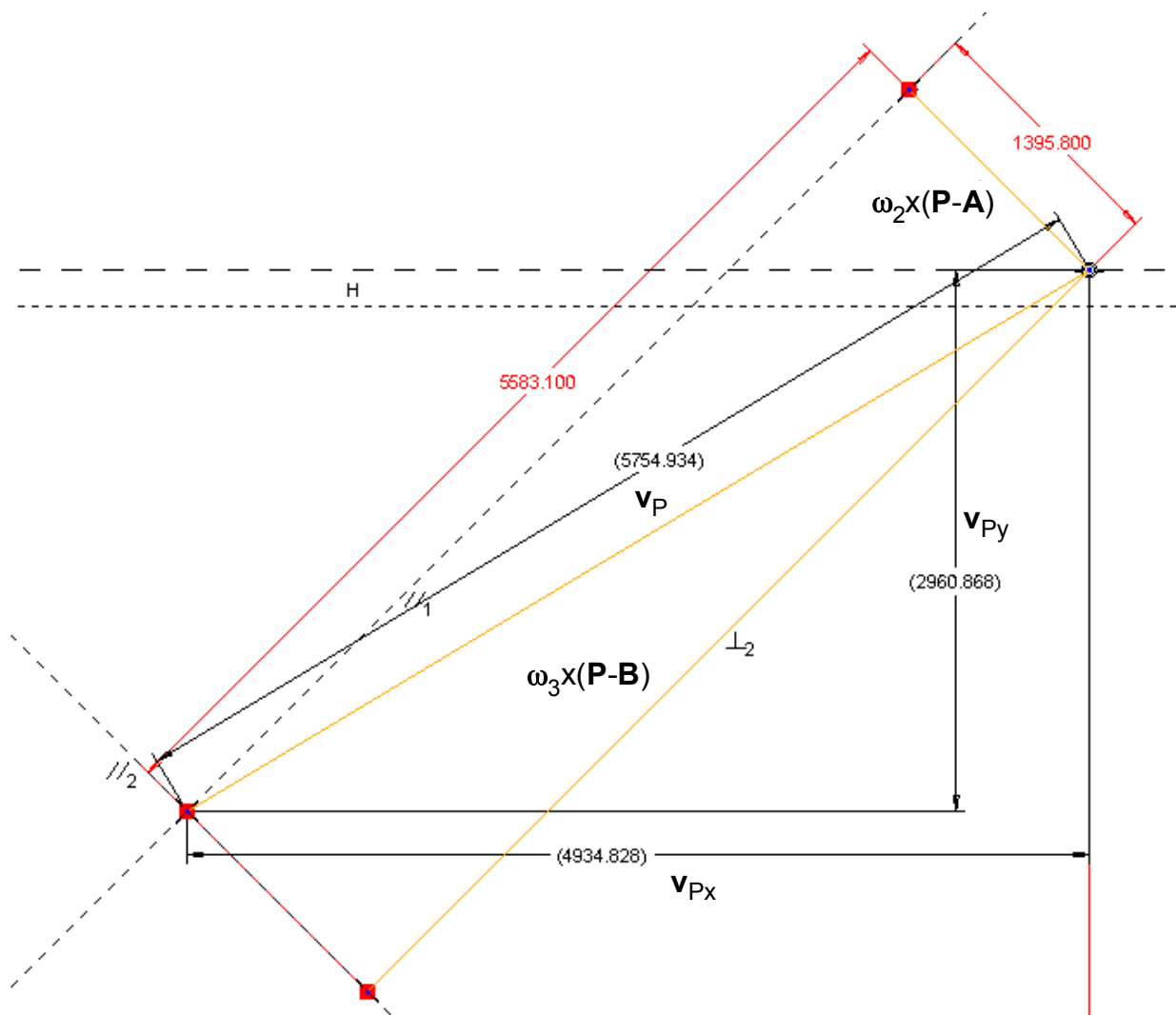


Figura 10: Poligono delle velocità per t=0

- **sesta domanda**

ACCELERAZIONI per t=0 ($\ddot{x}_P(0), \ddot{y}_P(0)$)

Poiché la figura nel testo dell'esercizio non definisce univocamente la posizione del meccanismo, il testo della domanda è ridefinito, e viene calcolata l'accelerazione di P per t=0.

L'equazione vettoriale che determina il poligono delle accelerazioni è:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_P &= -\omega_2^2(\mathbf{P}-\mathbf{A}) + \dot{\omega}_2 \times (\mathbf{P}-\mathbf{A}) + \mathbf{a}_{P_{-A}} + 2\omega_2 \times \mathbf{v}_{P_{-A}} = \\
 &= -\omega_3^2(\mathbf{P}-\mathbf{B}) + \dot{\omega}_3 \times (\mathbf{P}-\mathbf{B}) + \mathbf{a}_{P_{-B}} + 2\omega_3 \times \mathbf{v}_{P_{-B}}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Si osservi che derivando due volte le espressioni date per $\vartheta_2(t), \vartheta_3(t)$ e sostituendovi t=0, si ottiene $\ddot{\vartheta}_2(0) = 0, \ddot{\vartheta}_3(0) = 0$ e, pertanto, la precedente relazione si semplifica:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_P &= -\omega_2^2 (\mathbf{P} - \mathbf{A}) + \mathbf{a}_{P_A} + 2\omega_2 \times \mathbf{v}_{P_A} = \\
 &= -\omega_3^2 (\mathbf{P} - \mathbf{B}) + \mathbf{a}_{P_B} + 2\omega_3 \times \mathbf{v}_{P_B}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Le incognite della (15) sono i valori delle accelerazioni relative $\mathbf{a}_{P_A}, \mathbf{a}_{P_B}$ (accelerazioni dirette come le due aste, che individuano la variazione delle rispettive velocità di allungamento/accorciamento). In Figura 11 è dato il poligono delle accelerazioni, da cui risulta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{Px} &= 19842 \text{ mm/s}^2; \quad \mathbf{a}_{Py} = -58445 \text{ mm/s}^2 \\
 \mathbf{a}_{P_A} &= -20633 \text{ mm/s}^2; \quad \mathbf{a}_{P_B} = 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

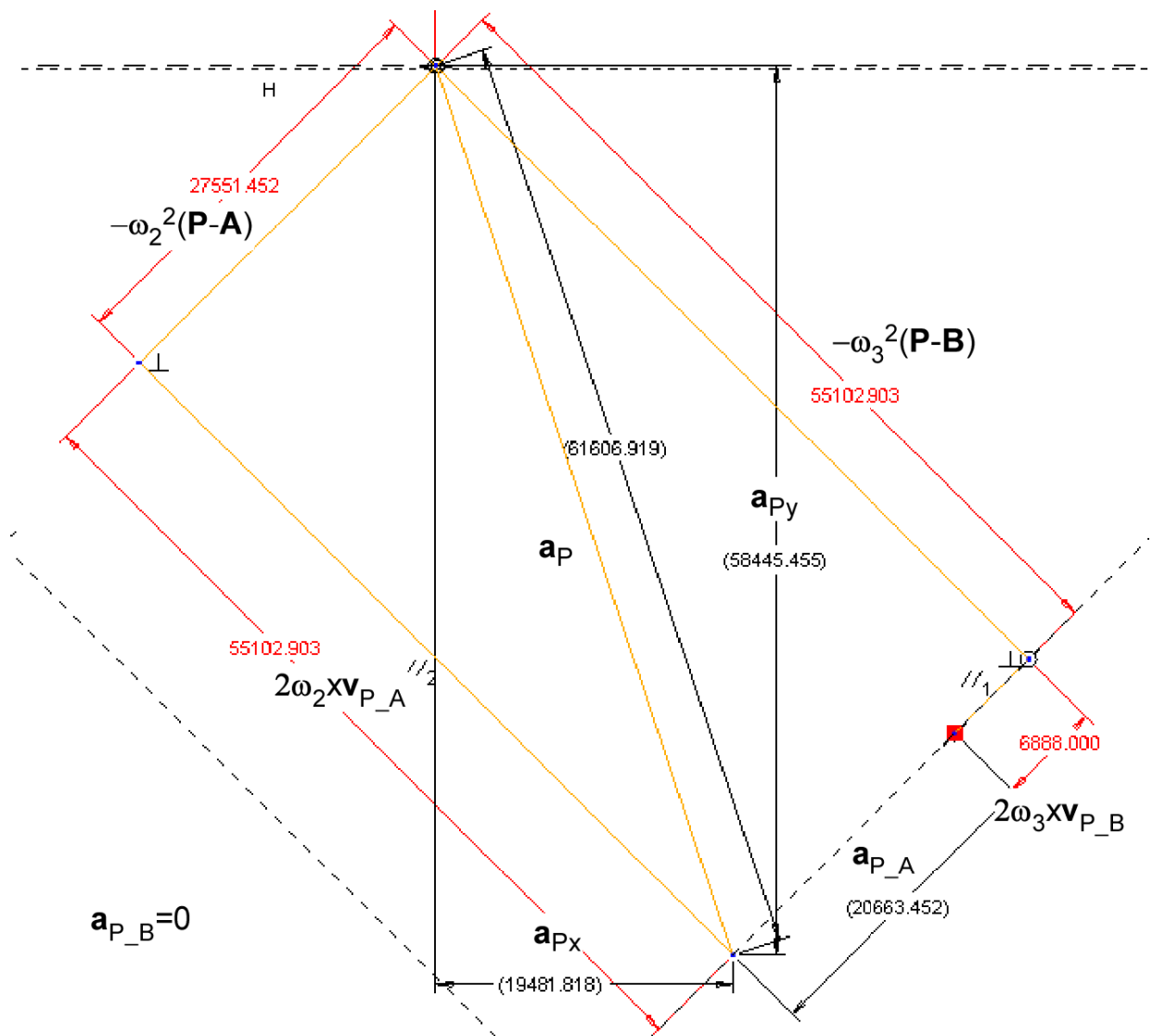


Figura 11: Poligono delle accelerazioni per t=0